Nicola Borgia

Le quattro operazioni dell'aritmetica pratica

prefazione di Paolo Bussotti

2ª edizione

vai alla scheda del libro su www.edizioniets.com

Edizioni ETS

www.edizioniets.com

ristampa 2017
EDIZIONI ETS
Piazza Carrara, 16-19, I-56126 Pisa
info@edizioniets.com
www.edizioniets.com

Distribuzione
Messaggerie Libri SPA
Sede legale: via G. Verdi 8 - 20090 Assago (MI)

Promozione
PDE PROMOZIONE SRL
via Zago 2/2 - 40128 Bologna

ISBN 978-884674785-3

Prefazione alla prima edizione

1. La struttura del libro

Il volume di Nicola Borgia *Le quattro operazioni dell'aritmetica pratica* è un testo strettamente collegato alla matematica nel suo sviluppo storico. Lo definirei un libro sulle fonti della storia della matematica, con un accentuato interesse storico – per esempio riguardo alla vita dei matematici analizzati – e con una forte propensione e possibilità di uso in sede didattica. Il testo è diviso in cinque parti.

Nella prima viene affrontato il problema della numerazione posizionale, in particolare del sistema decimale. L'autore ricorda come la prima menzione in Europa dei numeri indiani sia dovuto al vescovo Severus Sebokht, nella seconda metà del settimo secolo. Parla poi del ruolo di Al-Khuwarizmi VIII-IX secolo, della figura di Gerberto D'Aurilliac (940-1003) e dell'importanza del *Codex-Vigilanus* o *di Gobor*, composto nel 976 in Spagna settentrionale in cui sono riferiti i numeri arabi. Si concentra poi su *Liber Abaci* (1202 prima edizione, 1228 seconda edizione, la sola che possediamo) di Fibonacci (1175?-1250?) e sul modo in cui il grande matematico pisano introdusse e spiegò la numerazione arabo-indiana.

Questa parte è da interpretare come una introduzione alla trattazione vera e propria che comincia con l'operazione "Del Sommare". Borgia analizza qui il modo in cui 21 matematici insegnano a fare l'addizione. Il primo preso in esame è Fibonacci, fino a giungere a Guido Grandi (1671-1742), passando da matematici come Tartaglia, Pietro Antonio Cataldi e Cristoforo Clavio, solo per menzionare i più noti. Borgia propone una sintetica biografia di ognuno dei matematici che considera, corredandola anche con notizie relative ai contenuti delle opere più importanti scritte da ciascuno. Successivamente presenta i metodi adottati da tali matematici per eseguire l'addizione. Per ognuno, l'autore mette in luce le riprove a cui ricorse. Borgia usa questa tecnica: cita un brano degli autori che sta trattando in cui questi espongono i metodi per eseguire l'addizione. Ove necessario commenta la citazione. Se la citazione è in latino propone la traduzione. Quindi il lettore può seguire senza difficoltà le argomentazioni esposte. Tra i temi curiosi e sfruttabili sul piano didattico trattati da Borgia in questa sezione iniziale, menziono:

1) il modo in cui Cataldi suggerisce di fare l'addizione quando si devono sommare molti numeri;
2) la tecnica del "sommare alla rovescia" (Giulio Bassi Piacentino e Alessandro della Purificazione).

La terza parte è dedicata alla sottrazione ("Del Sottrarre"). La tecnica seguita da Borgia è la stessa adottata per la addizione. Qui sono analizzati gli insegnamenti di 19 matematici. Mancano, rispetto alla parte concernente l'addizione, Pietro Cataneo e Lodovico Gambari. Da segnalare in questa sezione:

1) quando una cifra del minuendo è minore di una cifra corrispondente del sottraendo, gran parte degli autori suggeriscono la "tecnica del complemento", piuttosto che quella del "prestito" tra le cifre del minuendo. Seguendo il primo esempio di Borgia tratto dall'*Arte de Labbacho*, se si deve calcolare 452–348, si considera il complemento a 10 di 8, cioè 2, si somma col 2 del 452, ottenendo 4, si aggiunge 1 alle decine del sottraendo, ottenendo 5, e poi si sottrae 35 da 45, così che il numero finale è 104. In termini moderni l'operazione può essere scritta: $452-[350-(+2)]$. Borgia sottolinea che questo procedimento è più semplice di quello del prestito;
2) Come rileva l'autore, un metodo curioso e interessante di sottrarre è quello proposto da Alessandro della Purificazione. Faccio un esempio più semplice di quello riportato da Borgia. Si debba calcolare 137–79. Secondo il metodo di Alessandro della Purificazione, per evitare il problema del prestito: A) si considera un numero di tanti 9 quante sono le cifre del minuendo. In questo caso 999; B) si esegue $999-79=920$; C) si somma questo risultato al minuendo, $920+137=1057$; D) si elimina la prima unità a sinistra (che in questo caso rappresenta le migliaia) e la si aggiunge alle unità, cioè rimane $57+1=58$. Questo è il risultato dell'operazione. Il metodo può essere riassunto così: $137-79=(10^3-1)-79+137-10^3+1$.

La quarta parte riguarda la moltiplicazione ("Del Moltiplicare"). La tecnica è la stessa. Gli autori considerati sono 19. Rispetto alla addizione mancano Alessandro di Villedieu, Sacrobosco e Guido Grandi. Ma viene presentato Pietro Borghi. La parte sulla moltiplicazione, e ancor più quella sulle divisione sono decisamente le più interessanti perché Borgia espone una serie di tecniche a cui oggi non si ricorre più, ma che potrebbero avere, se introdotte in modo opportuno, un notevole valore didattico per far comprendere – tra scuole elementari e scuole medie – cosa veramente significhi un sistema posizionale e le diverse modalità operative che esso può offrire. Nel complesso Borgia espone le seguenti tecniche:

1) moltiplicazione "per crocetta" (tecnica già introdotta da Fibonacci);
2) "per colonna", in cui viene moltiplicato tutto il moltiplicando per ogni cifra del moltiplicatore. Tecnica, in pratica, non in teoria ovviamente, inapplicabile quando uno dei due numeri ha più di due cifre;

3) "per scacchiere", "baricocolo" o "organetto", a seconda dei luoghi. È la tecnica oggi insegnata;
4) "per castelluccio", simile al baricocolo solo che si inizia moltiplicando la cifra che rappresenta la potenza più alta del dieci nel moltiplicatore per ogni cifra, a partire dalle unità, del moltiplicando;
5) "per scapezzo" o "per spezzato", quando uno dei due numeri da moltiplicare viene diviso in addendi e si applica poi la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Per esempio: $54\times43 = 54\times(10+10+10+10+3)$;
6) "per ripiego", in cui, dovendo moltiplicare un numero A per un numero composto B può esser conveniente scomporre B. Per esempio, considerare 57×28 come $(57\times4)\times7$. Borgia fa vedere come alcuni autori applichino il ripiego anche ai numeri primi (Alessandro della Purificazione, Lodovico Gambari);
7) "per quadrilatero";
8) "per gelosia o graticola".
   Questi due metodi, molto simili (Tartaglia, per esempio, li considera un solo metodo) ma non identici, sono interessanti perché mettono bene in luce il significato e ruolo della posizione delle cifre;
9) "in forma di piramide"; in cui si riempiono progressivamente i posti vuoti per ogni potenza del 10. Anche qui il ruolo della posizione delle cifre è messo in luce in modo particolarmente significativo. Questo metodo può essere utile sul piano didattico. Fornisco un esempio. Si debba moltiplicare 137×144:

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
		7		
		2		
	3	2	8	
	4	4	2	
1	1	1	2	8
		137		
		144		

   Si opera così: $4\times7 = 28 = 8$ unità, 2 decine; si pone 8 sotto la colonna delle unità, 2 sotto quelle delle decine; $4\times3 = 12$, 2 decine, 1 centinaio. La colonna delle decine non è libera al livello più basso, quindi si pone 2 sopra il primo 2 e 1 a sinistra del primo 2; $4\times1 = 4$. Sono centinaia. Si pongono sopra l'1. Ancora: $4\times7 = 28$, 8 decine, poste in colonna sopra i due 2 indicanti le decine già calcolate; 2 centinaia, poste sopra il 4 e così via. Si sommano poi i numeri così ottenuti, avendo 19.728;
10) "a triangolo", simile alla tecnica precedente;
11) "alla rovescia", in cui si comincia moltiplicando la cifra che rappresenta la

potenza del 10 più elevata del moltiplicatore per ogni cifra del moltiplicando. Come mostra Borgia, Giulio Bassi Piacentino presenta ben quattro modi di moltiplicare alla rovescia. Giulio Bassi propone anche la moltiplicazione a piramide e a triangolo.
Vengono anche trattati casi particolari in cui sono possibili procedure più brevi rispetto alle ordinarie, come quando si tratta di moltiplicare due numeri che hanno la stessa quantità di decine (Tartaglia). Una annotazione: Borgia ricorda come Cristoforo Clavio, in mancanza di una tavola pitagorica disponibile, insegni che per moltiplicare due numeri di una cifra, per esempio 7×8, basta considerare i complementi a 10 dei due numeri, quindi 3 e 2, moltiplicarli e si ottiene il numero delle unità che in questo caso è 6. Si sottrae poi da uno dei due numeri la differenza a 10 dell'altro, quindi $(8-3) = (7-2) = 5$, che è il numero di decine. Scritti i due numeri nella forma $10-a$ e $10-b$, l'algoritmo funziona in base alla formula: $(10-a)\,(10-b) = 10\,(10-a-b)+ab$, poiché $10-a$ e $10-b$ sono appunto i numeri iniziali.

La quinta parte concerne la divisione ("Divisione"). Gli autori considerati sono 18. Anche qui Borgia riporta le tecniche per eseguire la divisione presentate da ciascuno dei matematici che egli prende in esame. Rispetto alla moltiplicazione mancano Giuseppe Maria Figatelli ed Elia del Ré ed è reintrodotto Guido Grandi. In questa parte ci sono alcune spiegazioni lucide ed interessanti come quelle concernenti la famosa divisione "per galera". Borgia riporta le tecniche seguenti:

1) "per colonna" o "a regolo" o "a tavoletta" o "per ripiego" . Simile alla divisione a danda insegnata oggi, tuttavia si tengono a mente tutti gli avanzi e si scrive solo il quoziente e l'eventuale resto. Questo metodo può ragionevolmente essere utilizzato quando il divisore ha una cifra;
2) "per batelo" o "per galera" o "per galea". È un classico modo di eseguire la divisione, applicato nel Medioevo e nella prima età moderna. Richiede una tecnica piuttosto complessa ed elaborata che Borgia spiega molto bene (si guardi soprattutto la sezione dedicata a Cristoforo Clavio, ove la spiegazione è completa);
3) "per ripiego", in cui, se si deve dividere un numero per un numero composto, si sceglie una fattorizzazione in due o più fattori di quest'ultimo e si divide per uno di essi, il risultato si divide per il secondo e così via. Questo modo risulta poco pratico quando la divisione fornisce resti;
4) "per danda", nella versione "danda alla lunga" e "danda alla corta";
5) "per scapezo o scapezzo", tenica usata quando il divisore è della forma $a{\cdot}10^n$, dove a è un numero di una cifra.

Una osservazione molto interessante sulla definizione di moltiplicazione e di divisione viene fatta da Cataldi, il quale critica molti – tra i quali anche Pacioli, si veda quanto Cataldi scrive sulla definizione di moltiplicazione – che ritenevano la moltiplicazione una operazione che dovesse accrescere entrambi i fattori e la divisione una operazione che dovesse far decrescere il dividendo e, quindi, in base a questa idea, non riuscivano a capire quale fosse il risultato della moltiplicazione e della divisione di un intero per frazioni minori di 1. Per la moltiplicazione in particolare, Cataldi, come molti altri, riferendosi alla definizione euclidea – correttamente tradotta da Tartaglia (si veda quanto Borgia riporta) – definisce il prodotto tra due numeri come quel numero che contiene tante volte l'uno quante sono le unità dell'altro. Sottolinea poi, che se ci si limita a considerare interi positivi, si può considerare la moltiplicazione come somma ripetuta. La prima definizione è più generale e si applica ai razionali positivi compreso lo 0. Se per esempio si vuole moltiplicare 7 per ½ il prodotto conterrà 7 quante sono le unità di ½, cioè mezza unità, per cui il risultato sarà 3,5. La seconda definizione non è invece applicabile in questo caso. Cataldi sembra quindi comprendere che la definizione di una operazione non è assoluta, ma dipende dal campo numerico a cui si applica e una definizione è tanto migliore quanto più è estendibile a campi numerici diversi.

Il libro di Borgia non è un testo di storia della matematica nel senso generalmente accettato di questa espressione, ma il materiale che riporta e spiega è interessante per chi voglia consultare in modo comodo e con commenti alcune fonti di storia della matematica; per i docenti delle scuole elementari e medie che vogliano provare ad utilizzare in chiave didattica modi diversi di eseguire le operazioni dell'aritmetica pratica (questo potrebbe essere molto utile per far comprendere agli studenti fin dalla giovane età quanto sia variegato il mondo della matematica e come questa disciplina sia tutt'altro che qualcosa di arido e meccanico); per i ricercatori che si occupano di storia delle matematiche elementari visto che vi possono trovare, oltre che un certo numero di fonti, interessanti spunti di ispirazione come quello che ho menzionato riguardo alla definizione della moltiplicazione e della divisione. Il libro è godibile anche per chi non ha interessi specifici di storia della matematica, ma vuole avere un'idea di come nel corso della storia si è evoluto un settore didattico della matematica per comprendere il quale non occorrono particolari conoscenze specifiche, ma la voglia e la curiosità di comprendere l'evoluzione di una parte della conoscenza umana.

In quel che segue fornirò un sintetico inquadramento storico affinché il lettore possa collocare con più facilità le tecniche e i personaggi di cui parla Borgia.

2. Inquadramento storico

Il libro di Borgia copre, in pratica, cinque secoli, dal XIII alla fine del XVII. La valenza delle quattro operazioni elementari cambiò notevolmente nel corso di questo periodo. Quando Fibonacci le introdusse in Europa occidentale, nel '200, l'uso del sistema posizionale divenne subito argomento da didattica della matematica, ma svolgere certe operazioni, come la moltiplicazione, ma soprattutto la divisione quando sia il dividendo che il divisore avevano molte cifre, era un tema tutt'altro che semplice e – ancora nel '300 e nel '400 – solo i più bravi matematici e maestri d'abaco erano in grado di insegnare queste tecniche correttamente. Nel '600 la situazione è completamente diversa: è il secolo di Galileo, Keplero, Cartesio, Fermat, Huygens, Leibniz e Newton, solo per citare i maggiori matematici. Quindi le quattro operazioni elementari erano davvero esclusivamente un argomento di didattica. Per cui il lettore, digiuno di storia della matematica, che si avvicina al testo di Borgia deve tener presente che quando legge il modo in cui Fibonacci faceva la divisione è in presenza di un tema che all'epoca faceva parte della matematica avanzata, ma quando legge come Grandi insegnasse a fare la divisione, è in presenza di un testo la cui valenza e collocazione socio-educativa è simile (ovviamente non uguale) a quella di un moderno manuale. Nel periodo dal '200 al '600 si ha una serie di gradazioni intermedie tra la valenza assunta dalle quattro operazioni dall'epoca di Fibonacci a quella di Grandi. Con questo non intendo dire che, in generale, il progresso della matematica sia lineare. Per esempio, il livello raggiunto da Fibonacci in teoria dei numeri fu raggiunto e superato solo con Fermat, ma per le quattro operazioni elementari, in effetti, la loro incorporazione nel sistema educativo fu progressiva, data anche la loro grande importanza pratica.

I personaggi che ci presenta Borgia fanno quindi parte di contesti storici, scientifici e sociali piuttosto diversi, tutti però avvertirono la necessità di contribuire all'educazione matematica pubblicando – tra l'altro – opere di aritmetica pratica. Il punto di inizio dei quadri – così possono essere interpretate le sezioni dedicate ai vari matematici – rappresentati da Borgia è, per tutte e quattro le operazioni, Fibonacci, autore su cui vi è una letteratura sconfinata che analizza gli aspetti legati alla ricerca avanzata e quelli connessi con l'educazione matematica[1]. Per altro i due aspetti, in lui, non erano del tutto scissi. Di certo il *Liber Abaci* non è un testo semplice: nei suoi quindici capitoli sono affrontati una pluralità

[1] Come opere di Fibonacci, segnalo: Fibonacci 1228, 1857; Fibonacci 1862a; Fibonacci 1862b; Fibonacci 1862c. Come contributi di Fibonacci alla matematica avanzata, segnalo, senza avere la minima pretesa di essere esauriente: Woepcke 1853; Woepcke 1854-55; Genocchi 1855a; Genocchi 1855b; Genocchi 1855c; Genocchi 1857; Woepcke 1860-61; Favaro, 1874; Ver Eecke in Fibonacci 1952; Picutti 1979; Picutti 1983; Rashed 1994; Rashed 2003; Bussotti 2003; Bussotti 2004; Bussotti 2008; Bussotti 2009. Come contributi alla figura di Fibonacci, ancora una volta senza alcuna pretesa di esaustività, si veda: Boncompagni 1852; Franci 2002; Giusti 2002; Siegler 2002 (quest'opera è la traduzione in inglese del *Liber Abaci*).

di temi di carattere matematico che riguardano le operazioni elementari, ma anche problemi legati al calcolo delle frazioni, all'acquisto e vendita delle merci, al cambio delle monete, alla soluzione di vari problemi che oggi definiremmo riconducibili a sistemi di equazione di primo grado, al calcolo delle radici quadrate e cubiche e alle proporzioni geometriche. La lingua usata è il latino, lo stile e il modo di ragionare sono rigorosi, l'argomentazione complessa e articolata. In Italia tra il XIII e il XVI secolo le scuole d'abaco divennero un fenomeno sociale di massa. La Toscana fu probabilmente il territorio in cui le scuole furono più numerose, ma anche molte città dell'Italia del nord, quali Venezia ebbero fiorenti scuole d'abaco. A Firenze, dalla prima metà del XIII secolo fu attiva la famosa *Bottega di Santa Trinita* e dalla metà del secolo successivo la *Bottega di Santa Maria della Scala*, ove insegnò Benedetto da Firenze, uno dei più dotati maestri d'abaco, che ebbe anche Leonardo tra i suoi discepoli. Si calcola che tra XIII e XVI secolo furono attive più di venti scuole d'abaco a Firenze. Ma città più piccole come Pisa, Siena, San Gimignano, Lucca, Pistoia e Arezzo ebbero scuole d'abaco a partire da un periodo che va dalla fine del '200 al '300. Fuori della Toscana, Bologna e Verona ebbero scuole d'abaco dalla seconda metà del '200; Savona e Perugia dal '300 e Modena dall'inizio '400. A Venezia vi furono numerose scuole d'abaco. In una di queste, La *Scuola di Rialto*, studiò Luca Pacioli, uno dei personaggi del libro di Borgia. Vi erano scuole pubbliche e private. L'insegnamento era, in genere, diviso in cinque *mute*. Nella prima *muta*, denominata *librettine*, si introducevano le cifre Indo-Arabiche e si insegnavano la moltiplicazione e divisione tra interi; la seconda muta concerneva la divisione; la terza le frazioni e il calcolo frazionario; la quarta riguardava la regola del tre; la quinta il calcolo per lo scambio di monete. I maestri d'abaco possono essere considerati i primi matematici professionisti dell'Occidente[2].

Un fenomeno interessante, associato alle scuole d'abaco fu quello dei trattati d'abaco, quasi tutti scritti in volgare, che fiorirono tra il tredicesimo e il sedicesimo secolo. Van Egmont nel 1980 aveva censito circa 300 trattati d'abaco pubblicati in Italia nel periodo in esame[3] e negli anni più recenti ne sono stati scoperti altri. Gli argomenti dei trattati d'abaco, di cui un esempio classico è *Larte de Labbacho* o *Aritmetica di Treviso*, ricordato da Borgia come il primo testo di matematica stampato con caratteri mobili il 10 dicembre 1478, erano, più o meno, quelli insegnati a lezione dagli abacisti. Vi erano però una varietà di temi che

[2] Come testi sui maestri d'abaco e sulle scuole d'abaco come fenomeno sociale, segnalo, con la usuale e necessaria precisazione che non ho alcuna pretesa di essere esaustivo, ma solo di indicare testi utili per il lettore: Franci-Toti Rigatelli 1982; Franci-Toti Rigatelli 1983; Piochi 1984; Franci-Toti Rigatelli 1985; Franci 1988; Bagni 1998; Ulivi 2002; Ulivi 2011; Ulivi 2013.

[3] Van Egmond 1980.

spesso comparivano nei trattati, ma che non sempre erano esaminati nelle lezioni. Per esempio, erano talvolta trattate questioni astronomiche ed astrologiche[4]. Anche dopo l'epoca vera e propria dei trattati d'abaco, che – non senza una certa arbitrarietà – può ritenersi conclusa con la seconda metà del '500, gli autori dei trattati di aritmetica pratica furono spesso personaggi che si occuparono anche di astronomia e astrologia. Borgia nel suo lavoro ne menziona due: Giulio Bassi Piacentino (nato nel 1599) che fu matematico e astrologo, autore di una ponderosissima *Aritmetica Pratica* ed Elia del Rè, nato nel 1654, autore di una non meno cospicua *Aritmetica e Geometria Prattica*, il quale scrisse anche discorsi e trattati di astronomia e astrologia. Altro tema esaminato nei trattati d'abaco è la soluzione delle equazioni algebriche di secondo e terzo grado. Qui si assiste a un fenomeno molto interessante sul piano storico, riguardo alla diffusione delle idee matematiche: le soluzioni proposte dagli abacisti per le equazioni di terzo grado erano sbagliate ed erano trasmesse da un trattato all'altro. Vale forse la pena approfondire questo aspetto. Come è ben noto, la soluzione della equazione di terzo grado può esser fatta risalire al XVI secolo. Non entro nella questione di che cosa effettivamente avesse dimostrato Scipione del Ferro all'inizio del secolo e neppure entro nella polemica che oppose Niccolò Tartaglia a Gerolamo Cardano e Lodovico Ferrari nel decennio 1540-1550. Basti dire che l'equazione

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad 1)$$

può essere ricondotta a

$$y^3+py+q=0 \qquad 2)$$

dalle sostituzioni:

$$x=y-\frac{b}{3a}\,;\;\; p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\,;\;\; q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}\,.$$

I matematici italiani del XVI secolo risolsero l'equazione 2) e con ciò stesso la forma generale, e, anche se, in realtà, analizzarono una serie di casi particolari della 1), il loro metodo funzionava in generale.

Nei trattati d'abaco vi era, in genere, una sezione dedicata alla soluzione delle equazioni di secondo grado, per le quali veniva fornita la formula risolutiva corretta. Tali equazioni erano divise in "casi". La forma di scrittura era in parte dovuta al fatto che allora si consideravano solo le soluzioni positive. I casi, complessivamente, erano questi:

1) $ax^2=c$; 2) $ax^2=bx$; 3) $ax^2+bx=c$; 4) $ax^2+c=bx$; 5) $ax^2=bx+c$.

[4] Solo per dare un esempio in cui cospicue parti di un trattato d'abaco sono dedicate alla astrologia, si consideri il trattato di Paolo Dell'Abaco (1282-1374). Come riferimenti in proposito indico: Arrighi 1980, Piochi 1984, Dell'Abaco 1985.

Quanto all'equazione di terzo grado, gli abacisti proponevano una soluzione analoga a quelle di secondo grado, soluzione che è ovviamente sbagliata. In particolare, limitandoci ai casi in cui l'equazione è irriducibile a una di grado inferiore, si legge, trascrivendo in termini moderni che:

$$1)\ ax^3 = bx + c; \quad 2)\ ax^3 = bx^2 + c$$

avevano come soluzione

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}.$$

L'equazione

$$ax^3 = bx^2 + cx + d$$

aveva soluzione

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(c+d)}{a}} + \frac{b}{2a}.$$

Come, tra gli altri, ricorda Raffaella Franci[5], il primo testo, di cui si abbia notizia, che riporta queste regole è il *Libro di ragioni* di Paolo Gherardi del 1328. Solo per menzionare alcuni degli autori che hanno riferito tali regole, ricordo: 1) il *Trattato dell'alcibra amuchabile*, metà del XIV secolo; 2) Maestro Gilio, *Questioni di algebra*, fine XIV secolo; 3) le *Regole di geometria e della cosa*, di anonimo fiorentino, scritto probabilmente intorno al 1460; 4) Raffaele Canacci, seconda metà del '400, *Ragionamenti d'algebra. I problemi*[6]. Questi sono solo degli esempi.

Un caso diverso è quello di Maestro Dardi (sec. XIV), il quale in *Aliabraa Argibra*, riporta per l'equazione

$$cx^3+bx^2+ax=n$$

la formula risolutiva

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{n}{c}} - \frac{a}{b}$$

che è sbagliata, ma che funziona per i problemi particolari che Dardi propone[7].

Un caso simile è quello di Pier Della Francesca, il quale, nel suo *Trattato dell'Abaco*, nella risoluzione di problemi legati all'interesse composto, adottò per

[5] Franci, in GILIO 1983, p. XV.

[6] I quattro scritti a cui mi riferisco sono tratti da codici manoscritti e sono parti di più ampi trattati d'abaco. I titoli sono dati dai curatori o sono tratti direttamente dai titoli dati dagli autori allo specifico capitolo in esame. I riferimenti sono per 1) ANONIMO [sec XIV] 1994; per 2) GILIO 1983; per 3) ANONIMO FIORENTINO 1992; per 4) CANACCI 1983.

[7] Franci, in DARDI 2001, pp. 18-21.

l'equazione di terzo grado le soluzioni errate che abbiamo visto in precedenza ove compaiono solo radici quadrate. Nel caso specifico però queste soluzioni, sbagliate in generale, forniscono il risultato corretto[8]. Va sottolineato che Fibonacci, senza entrare nel problema della soluzione della equazione di terzo grado, aveva fornito le formule esatte per il calcolo dell' interesse composto, le quali, come nota Enrico Giusti, coincidevano solo in questo caso specifico con quelle di Pier della Francesca.

Caso ben diverso è quello offerto dal *Trattato d'algibra* di anonimo del secolo XIV, in cui l'autore comprende che le soluzioni delle equazioni di terzo grado delle forme

$$ax^3 = bx+c; \quad ax^3 = bx^2+c; \quad ax^3+c = bx^2$$

possono essere ottenute da quella di

$$y^3+py+q = 0$$

con le sostituzioni viste in precedenza. L'autore non si avventura in ipotesi sulla formula risolutiva di questa equazione e ottiene le soluzioni per approssimazione. In ciò rivela una cognizione del problema superiore agli altri abacisti, tanto che Raffaella Franci e Marisa Pancanti[9] hanno parlato di questo come del maggior contributo alla soluzione delle equazioni di terzo grado prima dei lavori dei matematici italiani del '500.

La produzione dei trattati d'abaco è dunque molto estesa, è quindi sbagliato etichettarla tutta sotto un comune denominatore, però è vero che, nella gran maggioranza dei casi, questa produzione è di parecchio inferiore al livello raggiunto da Fibonacci nel *Liber Abaci*. Gli argomenti trattati sono nel complesso più estesi di quelli esaminati da Leonardo Pisano, ma la qualità ed il rigore presente nell'opera di Fibonacci mancano. L'esempio dell'equazione di terzo grado è paradigmatico. I trattati d'abaco costituiscono quindi una produzione tumultuaria, in cui esigenze didattiche si frammischiano a spunti interessanti anche per la matematica avanzata dell'epoca – che comunque era meno scissa dalla didattica di quanto avverrà poi a partire dal '500, secolo che rappresenta una svolta in questo senso – e in cui non vengono trattate solo questioni matematiche ma spesso anche astronomiche e astrologiche. È questo, quindi il quadro in cui si inserisce quella parte del lavoro di Borgia relativo ai matematici che scrissero fino alla prima metà del XVI secolo. Dopo Fibonacci, tra i matematici esaminati da Borgia, l'autore della *Aritmetica di Treviso*, De Scolari Francesco Feliciano e Giovanni Sfortunati da Siena furono maestri d'abaco. Dalla seconda metà del '500 in poi, il quadro diviene più complesso: come noto, la ricerca matematica comincia a differenziarsi in maniera consistente dalla didattica:

[8] Sulla questione in Pier della Francesca si veda Giusti 1991 e Pisano-Bussotti, 2013.

[9] Franci-Pancanti, in Anonimo [sec XIV] 1988, p. xvi-xxi.

1) si è visto come i matematici italiani risolvano l'equazione di terzo grado;
2) con l'*Algebra* di Bombelli (1572) si accresce l'interesse per i problemi diofantei, che in realtà, non era mai venuto del tutto meno[10];
3) alla fine del secolo si collocano i fondamentali lavori di Viète sull'algebra;
4) alcune opere di Archimede erano state tradotte in latino da Gugliemo di Moerbecke nel 1269, ma la sua opera ebbe diffusione piuttosto ridotta. Col '500 le cose cambiano. Abbiamo l'edizione di Gaurico del 1503; nel 1544 viene pubblicata a Basilea l'*Editio Princeps* delle opere archimedee. Tartaglia dette un contributo fondamentale alla diffusione di Archimede in Italia poiché nel 1543 editò in latino la *Quadratura della parabola*, i due libri dell'*Equilibrio dei piani* (senza il commento di Eutocio), il primo libro dei *Galleggianti* e la *Misura del cerchio*. Nel 1551 nella *Travagliata inventione* comparve una parziale traduzione del primo libro *De Insidentibus Aquae*. L'edizione delle opere archimedee di Curzio Troiano del 1565 si basa quasi del tutto su materiali lasciati da Tartaglia. La diffusione delle opere archimedee dette un contributo fondamentale allo sviluppo della matematica, in un ambiente che stava divenendo pronto a comprendere il lavoro del grande siracusano[11];
5) nel 1537 si ha la prima edizione a stampa dei primi quattro libri de *Le Coniche* di Apollonio, grazie a Giovanni Battista Memo. La prima traduzione in latino risaliva a Gherardo da Cremona nel XIII secolo.
6) Fondamentali, per motivi diversi sono anche le edizioni di classici di Commandino e l'opera matematica di Francesco Maurolico che spaziò dalla teoria dei numeri, all'ottica, alla geometria.

Con questo ho solo voluto dare un'idea generale di come la matematica cambiò rapidamente nel corso del XVI secolo. La figura di Tartaglia, di cui Borgia analizza le sezioni del *General Trattato* dedicate alle quattro operazioni elementari, è importante nel contesto che stiamo esaminando perché rappresenta un personaggio che fu all'avanguardia nell'ambito della ricerca matematica, ma che fu anche maestro d'abaco. Probabilmente egli fu uno degli ultimi ad avere questo duplice ruolo ed è perciò che mi sono soffermato sulla sua opera fornendo qualche dettaglio. Successivamente i matematici attivi nella ricerca non furono più maestri d'abaco e l'insegnamento elementare cominciò a scindersi

[10] In proposito si può vedere Picutti 1979.

[11] Come lavori sulla tradizione Archimedea cito i classici e ancor oggi fondamentali Dijksterhuis 1938, 2014 e Clagett 1964-1984. Si veda anche Napolitani 2001. Recentemente un testo importante che riguarda Tartaglia e in cui è valutato anche il rapporto Tartaglia-Archimede è Pisano-Capecchi 2015. Mi corre l'obbligo, anche in questo caso, di segnalare che ho solo voluto indicare tre testi significativi sui problemi affrontati, in effetti la letteratura sull'argomento è molto abbondante.

dalla matematica come professione. Ciò non toglie, come mostra bene il libro di Borgia, che anche grandi matematici si dedicarono alla scrittura di opere di aritmetica pratica, ma questi matematici non erano più maestri d'abaco. Molti insegnavano alle università o erano membri di accademie, altri erano personaggi eclettici – secondo una tendenza che fu tipica dell'epoca rinascimentale – i cui interessi professionali e culturali non erano solo di carattere matematico. Abbiamo così Thaddeo Duno Locarnese (1523-1613), il quale, come ci informa Borgia, fu medico, pubblicò lavori in questo settore, tradusse in latino testi di vario genere, fu denunciato per le sue idee religiose riformiste. Nel 1546 pubblicò una *Arithmetices Practices Methodus*. Pietro Cataneo Senese (1510-1570?) fu architetto e ingegnere militare, ed essenzialmente svolse queste due professioni, fu anche matematico e pubblicò *Le pratiche delle due prime matematiche*. Tre degli autori trattati da Borgia sono celebri matematici: Cristoforo Clavio, il più noto astronomo e matematico della Compagnia di Gesù a cavallo tra '500 e '600; Pietro Antonio Cataldi, che insegnò matematica alla Accademia delle Belle Arti di Firenze e di Perugia e, successivamente, all'università di Bologna, dette importanti contributi allo studio e all'uso delle frazioni continue; Guido Grandi vissuto quasi un secolo dopo i due matematici precedenti (1671-1742), il quale fu matematico del Granduca di Toscana, insegnò all'università di Pisa e fu autore di diverse opere di astronomia, matematica e meccanica. Dalla seconda metà del '500 quindi gli autori di scritti sull'aritmetica delle quattro operazioni possono essere divisi in tre categorie: 1) matematici che dettero contributi significativi anche alla ricerca e ricoprirono importanti incarichi di insegnamento in accademie, università o monasteri; 2) matematici che si specializzarono, per usare un linguaggio moderno, nell'insegnamento elementare e che furono poco o per nulla attivi nella ricerca; 3) personaggi eclettici per i quali la matematica era, o era stata in una fase della vita, uno dei loro interessi, spesso neppure il più importante. Con la fine del '500-inizio del '600, quindi il contesto culturale in cui collocare i testi relativi alla aritmetica delle quattro operazioni cambia nel modo che ho cercato di descrivere sinteticamente. Il libro di Borgia si chiude con Guido Grandi perché, col '700, le modalità di insegnamento della matematica elementare nella penisola italiana cambiano ulteriormente, anche se in modo insensibile. Entrare nel dettaglio di questo problema va però oltre i confini della mia prefazione, così come affrontare la questione delle differenti modalità con cui l'insegnamento elementare della matematica era strutturato nelle diverse zone geografiche dell'Italia.

Bibliografia

Anonimo [Sec. XIV] (1988). *Il Trattato d'algibra*. Curato da Raffaella Franci e Marisa Pancanti. Serie «Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale», n. 18. Siena, Università degli Studi di Siena.

Anonimo [Sec. XIV] (1994). *Trattato d'alcibra amuchabile*. Curato da Annalisa Simi. Serie «Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale», n. 22. Siena, Università degli Studi di Siena.

Anonimo fiorentino (1992). *Regole di geometria e della cosa*. Curato da Annalisa Simi. Serie «Quaderni del Centro della matematica medievale», n. 20. Siena, Università degli Studi.

Arrighi G. (1980). *Una importante lezione dell'opera di M. Paolo dell'Abbaco*, in «Atti della Fondazione G. Ronchi», XXXV, 858-874.

Bagni G.T. (1998). *Dopo L'arte de labbacho: trattati scientifici e manuali didattici dal 15. al 19. secolo nella storia della matematica*. Treviso, Ateneo di Treviso.

Boncompagni B. (1852). *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*. Roma, Tipografia delle Belle Arti

Bussotti P. (2003). *Il contributo di Fibonacci alla teoria dei numeri. 1*, in «Nuova Secondaria», 3, 77-80.

Bussotti P. (2004). *Il contributo di Fibonacci alla teoria dei numeri. 2*, in «Nuova Secondaria», 6, 83-86.

Bussotti P. (2008). *Fibonacci und sein Liber Quadratorum*, in *Kaiser Friedrich II. (1194-1250). Welt und Kultur des Mittelmeerraums,* 234-249. Mainz am Rheim: Philip von Zabern.

Bussotti P. (2009). *Problems and methods at the origin of the theory of numbers*. Napoli, Accademia Pontaniana.

Canacci R. (1983). *Ragionamenti d'algebra. I problemi*. Curato da Angelo Procissi. Serie «Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale», n. 7. Siena, Servizio Editoriale dell'Università di Siena.

Clagett M. (1964-1984). *Archimedes in the Middle Ages*. Cinque volumi. Madison, University of Wisconsin Press

Dell'Abaco P. (1985). *Praticha d'astorlogia*. Curato da Brunetto Piochi. Serie «Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale», n. 14. Siena, Università degli Studi.

Dijksterhuis E.J. (1938, 2014). *Archimedes*. Princeton Legacy Library.

Favaro A. (1874). *Notizie storiche sulle frazioni continue*, in «Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche», VIII: 451-586.

Fibonacci L. (1228, 1857). *Liber Abbaci*, in *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, pubblicato da Baldassarre Boncompagni. Volume I. Roma, Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche.

Fibonacci L. (1862a). *Flos*, in *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, pubblicato da Baldassarre Boncompagni. Volume II (*Practica Geometriae* ed opuscoli), 227-252, Roma, Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche.

Fibonacci L. (1862b). *Liber Quadratorum*, in *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, pubblicato da Baldassarre Boncompagni. Volume II (*Practica

Geometriae ed opuscoli), 253-283. Roma, Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche.

Fibonacci L. (1862c). *Practica Geometriae*, in *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo* pubblicato da Baldassarre Boncompagni. Volume II (*Practica Geometriae* ed opuscoli), 1-224. Roma, Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche.

Fibonacci L. [come Leonarde de Pise] (1952). *Le Livre de nombres carres*, curato da Paul ver Eecke. Paris, Blanchard.

Franci R. (1988). *L'insegnamento della matematica in Italia nel tre–quattrocento*, in «Archimede», 40, 182-193.

Franci R. (2002). *Il* Liber abaci *di Leonardo Fibonacci*, in «La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 8, 293-328.

Franci R., Toti Rigatelli L. (1982). *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento*. Siena, Servizio editoriale dell'Università di Siena.

Franci R., Toti Rigatelli L. (1983). *Maestro Benedetto da Firenze e la storia dell'algebra*, in «Historia Mathematica», 10 (3), 297-317.

Franci R., Toti Rigatelli L. (1985). *Towards a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli*, in «Janus», 72 (1-3), 17-82.

Genocchi A. (1855a). *Intorno a tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassare Boncompagni. Nota*, in «Annali di scienze matematiche e fisiche», 6, 115-120.

Genocchi A. (1855b). *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni. Note analitiche di Angelo Genocchi*, in «Annali di scienze matematiche e fisiche», 6, 161-185, 219-251, 273-320, 345-362.

Genocchi, A. (1855c). Brani di lettere di Genocchi a Boncompagni, in «Annali di scienze matematiche e fisiche», 6, 129-134, 186-194, 195-205, 206-209, 251-253, 254-257, 257-259.

Genocchi A. (1857). *Leonardo Pisano, matematico del secolo XIII*, in «Annali di scienze matematiche e fisiche», 8, 261-283.

Gilio M. (Maestro) (1983). *Questioni d'algebra*. Curato da Raffaella Franci. Serie «Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale», n. 6. Siena, Servizio Editoriale dell'Università di Siena.

Giusti E. (1991). *L'algebra del Trattato d'abaco di Piero della Francesca: osservazioni e congetture*, in «Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche», XI, 2, 55-83.

Giusti E. (2002). *Matematica e commercio nel* Liber Abaci, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*. Consultabile al sito: http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/fibonacci/catalogo/giusti.php.

Napolitani P.D. (2001). *Archimede. Alle radici della scienza moderna*. Serie «I grandi della scienza», 22, supplemento di «Le Scienze. Edizione italiana di Scientific American».

Piochi B. (1984). *Il Trattato di Paolo dell'Abbaco*, in «Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze», IX, 1, 21-40.

Picutti E. (1979). *Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel Codice Palatino 557 della Biblioteca Nazionale di Firenze*, in «Physis», 21, 195-339.

Picutti E. (1983). *Il* Flos *di Leonardo Pisano. Traduzione e commento*, in «Physis», 25, 293-387.

Pisano R., Bussotti P. (2013). *On popularization of* scientific education *in Italy between 12th and 16th century*, in «Problems of Education in the 21th Century», 57, 90-101.

Pisano R., Capecchi D. (2015). *Tartaglia's science weights and Mechanics in XVI century. Selections from Quesiti et invention diverse: Books VII-VIII*. Dordrecht, Springer.

Rashed R. (1994). *Fibonacci et les Methématiques arabes*, in «Micrologus», 2, 145-160.

Rashed R. (2003). *Fibonacci et le Prolongment Latin des Mathématiques Arabes*, in «Bollettino di storia delle scienze matematiche», XXIII, 55-73.

Siegler L. (2002). *Fibonacci's* Liber Abaci. New York, Springer.

Ulivi E. (2002). *Scuole e maestri d'abaco in Italia tra Medioevo e Rinascimento*, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*. Consultabile al sito: http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/fibonacci/catalogo/ulivi.php.

Ulivi E. (2011). *Su Leonardo Fibonacci e sui maestri d'abaco pisani dei secoli XIII-XV*, in «Bollettino di storia delle scienze matematiche», XXXI, 2, 247-286.

Ulivi E. (2013). *Gli abacisti fiorentini delle famiglie "del maestro Luca", Calandri e Micceri e le loro scuole d'abaco (secc. XIV-XVI)*. Firenze, Olschki.

Van Egmond W. (1980). *Practical mathematics in the italian Reneissance: a catalog of the Italian Abacus manuscripts and printed books to 1600*. Firenze, Istituto e Museo di Storia della Scienza.

Woepcke F. (1854-55). *Sur le traité des nombres carrés de Léonard de Pise, retrouve et publié par M. le prince Balthasar Boncompagni*, in «Journal de mathématiques pures et appliquées», 1re série, 20, 54-62.

Woepcke F. (1860-61). *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise. III – Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers et d'un traité sur le même subjet de Abou Dia' far Mohammed ben Aloçain*. Rome, Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Settembre 2014
Paolo Bussotti

Prefazione alla seconda edizione

In questa seconda edizione de *Le quattro operazioni dell'aritmetica pratica*, l'autore ha modificato alcune parti del proprio lavoro che adesso appare ancor più compatto, unitario e chiaro, quanto agli scopi, della prima edizione, che pure aveva notevole coerenza interna. In questa prefazione, segnalerò le principali differenze tra le due edizioni.

1) A fine pagina 24 l'autore chiarisce che uno degli scopi essenziali del proprio lavoro è il tentativo di far comprendere ai giovani che l'aritmetica non è una disciplina arida e slegata dalla realtà, ma anzi ha profondi legami con la realtà stessa. La presentazione di parte del percorso storico tramite cui sono state acquisite e insegnate in Europa le tecniche dell'aritmetica pratica è un ottimo modo per introdurre i giovani a questa disciplina. L'invito a una didattica della matematica basata anche sulla storia della disciplina era una concezione già espressa nell'introduzione alla prima edizione del libro di Borgia, ma qui è chiarita in modo più esplicito.
2) Borgia esamina i modi in cui gli autori da lui presentati eseguono le quattro operazioni dell'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Nella prima edizione, in alcuni autori non venivano presentate tutte le operazioni. Il che è del tutto comprensibile perché lo scopo della prima edizione era fornire i canoni con cui i matematici del periodo esaminato svolgevano ed insegnavano le operazioni. Dunque, quando due autori eseguivano due operazioni in modo simile, Borgia spesso riporta l'operazione relativa a un solo autore. In questa seconda edizione egli, con acuito e profondo spirito storico, completa il quadro e riporta la tecnica di tutti gli autori per ogni operazione. In particolare sono aggiunte: quanto al sommare, la tecnica di Borghi; quanto al sottrarre, le tecniche di Cataneo e Gambari; per il moltiplicare quelle di Villa Dei, Sacrobosco, Grandi; per il dividere quelle di Villa Dei, Sacrobosco, Figatelli, Elia Del Rè e Cortese.
3) Un testo che ha anche carattere storico e che vuole far conoscere gli autori trattati a un pubblico che non comprenda solo specialisti del settore, risulta più gradevole e completo se sono aggiunte anche indicazioni biografiche.

Borgia aveva già lavorato molto nella prima edizione. In questa seconda il lavoro viene ulteriormente migliorato e completato. Così, è inserita la biografia di Gerberto D'Aurillac; la biografia e l'opera di Fibonacci sono chiarite riferendosi ai contributi d'importanti storici della matematica come Ser Perizolo da Pisa, Bernardino Baldi, Pietro Cossali, G. Targioni Tozzetti (Prefetto della Biblioteca Magliabachiana), G.G. Grimaldi, Attilio Frajese, che non erano stati menzionati nella prima edizione. In questo contesto sono meglio specificate anche le tecniche usate da Fibonacci per eseguire le quattro operazioni. Altre indicazioni biografiche introdotte ex novo o migliorate riguardano Luca Pacioli, Giovanni Sfortunati, Nicolò Tartaglia, Cristoforo Clavio, Pietro Antonio Cataldi, Guido Grandi e Giulio Bassi.

4) Lo sforzo di completezza e perspicuità concerne anche le indicazioni bibliografiche e la descrizione riassunto delle opere trattate. Infatti Borgia ha inserito, in questa seconda edizione, l'elenco di tutte le opere scritte dai matematici da lui analizzati, indicando, per ogni opera, data, luogo di pubblicazione e nome dello stampatore. Quanto ai contenuti, è stata inserita una sintesi di ciascuna opera. Il lettore può così avere un quadro completo degli argomenti trattati. Dunque, i miglioramenti introdotti da Borgia hanno contribuito a raffinare e completare un testo che era già molto utile ed interessante nella prima edizione. Questa seconda approfondisce e chiarifica aspetti che rendono il volume ancora più godibile per chiunque voglia avvicinarsi a questo ordine di problemi ed approfondirli.

Livorno, settembre 2016
Paolo Bussotti

Introduzione

Lo scopo di questa ricerca è quello di acquisire maggiore conoscenza dei libri d'abaco e mettere in evidenza i mutamenti avvenuti nel campo dell'aritmetica pratica dal XII al XVII secolo. Abbiamo preso in esame le opere scritte da alcuni matematici e maestri d'abaco vissuti in quel periodo, senza avere però la pretesa di aver portato a termine un lavoro completo in ogni suo aspetto.

Questi libri avevano il principale scopo di trasmettere le conoscenze dell'aritmetica pratica e ampio spazio era dedicato sia alle tecniche per eseguire le quattro operazioni aritmetiche, sia alla verifica della loro correttezza. Infatti in tutti i testi sono presenti le prove da eseguire sulle operazioni con la regola del 5, del 7, del 9, dell'11, ecc. perché, molto spesso, dall'esattezza dei calcoli dipendeva la buona riuscita di un'operazione commerciale. In essi vi erano anche le regole pratiche per la risoluzione di problemi commerciali e finanziari e delle formule da mandare a memoria senza dimostrazione. L'insegnamento era quindi di tipo catechistico, basato su formule da ricordare e l'apprendimento avveniva per imitazione di casi già risolti (quando devi risolvere un problema di questo tipo "fa così" senza ulteriori dimostrazioni).

I libri d'abaco erano scritti, quasi sempre, nelle lingue volgari delle varie regioni italiane ma alcuni, come il *Liber Abaci,* o il *Tractatus De Arte Numerandi* ed altri, in lingua latina.

Notiamo che la data d'inizio della nostra ricerca coincide con un periodo in cui l'Italia, soprattutto l'Italia centro-settentrionale, ebbe una forte crescita economica e un profondo rinnovamento sociale e culturale. Nacquero le Università e si costituirono dei centri urbani, i Comuni, dove si svilupparono le attività commerciali di ogni tipo. Il Mediterraneo diventò sempre più il centro d'importanti scambi commerciali attraverso le città marinare italiane, e contemporaneamente i mercanti di Pisa, Lucca, Siena, Genova, Venezia, assunsero un ruolo cruciale. In conseguenza di ciò, aumentò anche il numero delle operazioni finanziarie che divennero ancora più difficili e di diversa natura. Bisognava risolvere il problema dell'*interesse* (chiamato "merito" dal verbo latino *merere,* cioè guadagno, frutto di una certa somma di denaro data in prestito), del cambio delle monete, dei pesi, delle misure, delle superficie, ecc. In quel periodo, i mercanti, pur incontrando grandi difficoltà, registravano i loro dati numerici utilizzando le cifre romane e, per fare i calcoli, usavano "l'abaco" e ricorrevano anche ad un procedimento abbastanza complesso basato sull'impiego delle dita (Indigitazione). Questo metodo però, basato sul sistema di numerazione additivo romano, non consentiva di risolvere tutti i problemi inerenti agli scambi commerciali.

La soluzione arrivò quando il grande matematico **Leonardo Bigollo Pisano detto Fibonacci** (1170?-1250), introdusse il sistema di numerazione decimale posizionale Indo-Arabico.

Fibonacci fu la figura di maggiore rilievo del XII secolo, che colse l'opportunità offerta dai suoi viaggi in Egitto, Siria, Grecia, Provenza, Sicilia, per studiare e imparare le tecniche matematiche con l'uso dei simboli arabo-indiani. Tornato in patria, nel 1202 pubblicò il *Liber Abaci* che, per la sua chiarezza espositiva, pur essendo scritto in latino, fu il testo a cui si ispirarono quasi tutti i matematici successivi che scrissero le loro opere in lingua volgare. Per questo motivo, abbiamo ritenuto di primaria importanza l'opera del Fibonacci, ne abbiamo esaminate alcune parti e descritto in ogni dettaglio gli algoritmi delle quattro operazioni. Abbiamo così evidenziato come, utilizzando i nuovi simboli, in sostituzione della scomoda numerazione romana additiva, queste operazioni, quando se ne è appreso l'algoritmo, diventano non solo accessibili a tutti ma indispensabili per la risoluzione dei problemi di carattere pratico.

Leonardo Pisano fu Maestro d'abaco del Comune di Pisa, come risulta da una delibera che si trova nel *Constitutum pisanum legis et usus*, conservato all'Archivio di Stato di Pisa, che recita:

> *Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum qui eis tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi bigolli in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit conferuntur ut eidem Leonardo merito dilectionis et gratie atque scientie sue prerogativa in recompensatione laboris sui quem sustinet in audiendis et consolidantis estimationibus et rationibus supradictis a comuni et camerariis publicis de comuni et pro comuni mercede sive salario suo annis singulis libre XX denariorum et amisceria consueta dari debeant ipseque pisano comuni et suis officialibus in abbacatione de cetero more solito servat presenti constitutione firmamus* (Considerando l'onore e il profitto della nostra città e dei cittadini, che derivano loro dalla dottrina e dai diligenti servigi del discreto e sapiente maestro *Leonardo Bigollo* nelle stime e ragioni d'abaco necessarie alla città e ai suoi funzionari, e in altre cose quando occorre, deliberiamo col presente atto che allo stesso Leonardo, per la sua dedizione e scienza e in ricompensa del lavoro che sostiene per studiare e determinare le stime e le ragioni sopraddette, vengano assegnate dal comune e dal tesoro pubblico venti lire a titolo di mercede o salario annuo, oltre ai consueti benefici, e che inoltre lo stesso [Leonardo] serva come al solito il comune pisano e i suoi funzionari nelle pratiche d'abaco) (Enrico Giusti,

Leonardo Fibonacci e la rinascita della matematica in Occidente. Lavoro eseguito nell'ambito del progetto "Storia delle Matematiche" del MIUR- Dipartimento di Matematica, Univer. Di Firenze, p. 2).

Dopo l'esposizione dell'opera del pisano, siamo passati alle opere dei matematici più rappresentativi vissuti tra il XIII e XVII secolo.

Importante è il manuale *Larte de Labbacho o Aritmetica di Treviso*. Si tratta del primo libro di matematica, di autore anonimo (composto da 62 pagine non numerate), pubblicato il 10 Dicembre 1478, cioè 22 anni dopo l'invenzione della stampa a caratteri mobili, ed è scritto in volgare veneziano; non è diviso in capitoli come il *Liber Abaci* e non ha un indice. In esso è descritta, per la prima volta, la tavola con cui si indicano i risultati delle moltiplicazioni «da 1 fia 1, a 1 fia 9; da 1 fia 10 a 9 fia 10; da 1 fia 100 a 9 fia 100» e le quattro operazioni hanno «[...] uno suo speciale articolo, zoe: et, de, fia, in», corrispondenti rispettivamente all'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Dopo l'invenzione della stampa a caratteri mobili (1456), in breve tempo si determinò una rapida diffusione dei più importanti testi di matematica, tra questi occupa un posto di rilievo la *Summa De Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* di Luca Pacioli, scritta in volgare: «[...] in vernacula lengua mi son messo a disponerla. In modo che litterati e vulgari oltre lutile ne haranno grandissimo piacere in essa esercitandose».

È importante la chiarezza espositiva di quest'opera e, per ciò che riguarda le quattro operazioni, si nota una meticolosa scelta degli esempi graduati per difficoltà crescenti. G.T. Bagni scrive: «[...] L'impostazione didattica appare chiara: i numerosi esempi sono adeguatamente calibrati per difficoltà» (G.T. Bagni, *Larte de Labbacho e la Matematica Medievale*. Ateneo di Treviso, 2001-2002, p. 2).

Il Pacioli è anche uno dei pochi autori che indica la fonte da cui ha attinto parte del suo lavoro, anche se l'indicazione è solo un accenno storico; nomina Euclide, Severino Boezio, Leonardo Pisano, Giordano Biagio da Parma, Sacrobosco «[...] dai quali [Autori] in maggior parte cavo el presente volume».

Per quanto riguarda la sottrazione notiamo che nell'eseguire l'operazione si serve dello stesso algoritmo applicato nell'aritmetica di Treviso, ma espone anche esempi in cui esegue l'operazione con la "presa in prestito".

Un ruolo molto importante nel XVI sec. ha avuto anche Nicolò Fontana detto Tartaglia nella sua funzione di "*Magister Abbachi*" che esercitò sia in forma pubblica che privata. Tra le opere scritte da questo matematico abbiamo preso in esame il *General Trattato di Numeri et Misure* dove descrive in volgare anche le quattro operazini dell'aritmetica pratica. È interessante *L'Aritmetica Mercantile di Pietro Borghi da Venezia*, scritta in un italiano lagunare ad uso «[...] di qualunque giovinetto dedito alla merchadantia».

Si nota nel testo che l'Autore, per facilitarne l'apprendimento mnemònico, ricorre ad un artificio: le regole sono enunciate in modo sintetico ma completate da numerosi problemi riguardanti le varie attività commerciali che lui evidentemente conosceva molto bene. Però, data la natura della nostra ricerca, nel lavoro non abbiamo esposto questi problemi.

Abbiamo preso in esame anche le opere scritte da matematici appartenenti ad ordini religiosi (Francescani, Gesuiti, Agostiniani, Cappuccini, Carmelitani, Scuole Pie), a conferma del fatto che nel XVI e XVII secolo essi rappresentavano l'80% degli insegnanti di matematica. Tra questi, oltre al Pacioli già menzionato, abbiamo Giuseppe Maria Figatelli, Elia del Rè, Pellegrino Felice Carisi, Alessandro della Purificazione, Guido Grandi, Cristoforo Clavio. Quest'ultimo, nella sua *Aritmetica Pratica,* scritta in latino, espone le quattro operazioni servendosi di numerosi esempi presentati con grado di difficoltà crescente. L'Autore ha rivolto particolare attenzione alla divisione a galea o battello, descrivendola, non solo in maniera dettagliata, ma curando anche i casi in cui esistono delle difficoltà nel calcolare i quozienti parziali. In particolare: «Quando per il Quotiente è pigliata una figura troppo piccola, ò grande che cosa si debba fare».

Infine, nella nostra ricerca, abbiamo messo in evidenza tutti gli accorgimenti metodologici utilizzati dai matematici e maestri d'abaco presi in esame, per rendere più semplice e accessibile la materia costituita dai numeri e dalle quattro operazioni.

Concludiamo dicendo che quanto abbiamo scritto rappresenta una piccola antologia di documenti matematici, che può essere usata per una prima incompleta conoscenza del mondo della matematica insegnata nel Medioevo e nel Rinascimento, ma soprattutto il punto di partenza per introdurre indagini più approfondite.

Il nostro lavoro è stato costruito nella maniera più semplice, in modo che il contenuto sia facilmente inteso anche da chi ha una preparazione non superiore a quella che si ottiene frequentando le scuole medie. È stato realizzato per convincere i giovani, (molto spesso ingannati da false difficoltà che s'incontrano nello studio della matematica) che l'aritmetica non è un terreno arido, un mondo di studiosi privi di legami con la realtà, ma il luogo in cui il nostro intelletto può trovare l'ispirazione per il successo perché, lo studio dell'aritmetica, come afferma Cristoforo Clavio, è fondamentale per lo studio delle altre discipline, «[...] anzi tutte l'altre scienze sono talmente fondate nell'Aritmetica, che non par che questa possa cadere, senza che quelle dalla sua rovina non restino gravemente dannificate & guaste[...] non solo perché quelle senza i numeri sono niente, ma ancora perché nel trattar dei numeri s'abbellisce l'animo, e si prepara a ricevere i semi di tutte l'altre scienze».

Pertanto, se quanto abbiamo scritto servirà a comunicare ai nostri lettori un briciolo di utile e riuscirà a stimolare la loro curiosità, ci riterremo soddisfatti e incoraggiati a pensare che quel che abbiamo fatto sarà valso a qualcosa.

Nardò, settembre 2016
Nicola Borgia

Ringraziamenti

Desidero esprimere un affettuoso ringraziamento all'amico Gennaro Giannuzzi, professore emerito dell'Accademia Navale di Livorno, per i suoi preziosi suggerimenti ed il suo generoso aiuto.

Un particolare ringraziamento unitamente ad una sincera e profonda gratitudine al Dottor Paolo Bussotti, storico della matematica, per l'attenzione e lo scrupolo con cui ha letto il mio lavoro e per gli indispensabili consigli ed indicazioni in tutte le fasi della realizzazione del testo.

"*Un interesse per la storia ci segna per tutta la vita. Il nostro modo di intendere noi stessi e gli altri è plasmato dalla storia che assimiliamo, non solo a scuola, ma anche attraverso film, giornali, programmi televisivi, romanzi e perfino fumetti. Dal momento in cui ne abbiamo una prima conoscenza, il passato può stimolare la nostra immaginazione ed eccitare la nostra curiosità: ci poniamo interrogativi e cerchiamo risposte nella storia...*"

George Gheverghese Joseph

(*C'era una volta un numero*, Il Saggiatore, Milano 2000, p. 17)

Indice

Edizioni ETS
Piazza Carrara, 16-19, I-56126 Pisa
info@edizioniets.com - www.edizioniets.com
Finito di stampare nel mese di gennaio 2017